

4.1.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในรูป $y = u(x)^{v(x)}$

กำหนดให้ u, v เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้วอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = u(x)^{v(x)}$ มีขั้นตอนการหาดังนี้

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ $y = u(x)^{v(x)}$

ขั้นที่ 2 ใส่ $\ln$ ทั้งสองข้างแล้วใช้กฎของลอการิทึม

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln [u(x)^{v(x)}] \\ \ln y &= v(x) [\ln u(x)]\end{aligned}$$

ขั้นที่ 3 หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้าง

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \ln y &= \frac{d}{dx} v(x) [\ln u(x)] \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= v(x) \frac{d}{dx} [\ln u(x)] + [\ln u(x)] \frac{d}{dx} v(x)\end{aligned}$$

ขั้นที่ 4 แก้สมการหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

ตัวอย่างที่ 4.9 กำหนดให้ $y = x^{x^2+1}$ จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

□

ตัวอย่างที่ 4.10 กำหนดให้ $y = x^{\ln x}$ จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ



คำถามฝึกคิดด้วยตนเอง

กำหนดให้ $y = (x - 1)^{\sqrt{x}}$ จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4.11 กำหนดให้ $y = (\ln x)^{2x^3+3}$ จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ พิจารณา $y = (\ln x)^{2x^3+3}$ ใส่ $\ln$ ทั้งสองของสมการจะได้ว่า

$$\ln y = \ln((\ln x)^{2x^3+3})$$

โดยคุณสมบัติของลอการิทึมจะได้ว่า

$$\ln y = (2x^3 + 3) \ln(\ln x)$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} ((2x^3 + 3) \ln(\ln x))$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = (2x^3 + 3) \frac{d}{dx} \ln(\ln x) + \ln(\ln x) \frac{d}{dx} (2x^3 + 3)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = (2x^3 + 3) \left(\frac{1}{\ln x} \frac{d}{dx} \ln x \right) + \ln(\ln x) (6x^2)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = (2x^3 + 3) \left(\frac{1}{\ln x} \left(\frac{1}{x} \right) \right) + \ln(\ln x) (6x^2)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = (2x^3 + 3) \left(\frac{1}{x \ln x} \right) + 6x^2 \ln(\ln x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left(\frac{2x^3 + 3}{x \ln x} + 6x^2 \ln(\ln x) \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = (\ln x)^{2x^3+3} \left(\frac{2x^3 + 3}{x \ln x} + 6x^2 \ln(\ln x) \right)$$

เพราะฉะนั้น $\frac{dy}{dx} = (\ln x)^{2x^3+3} \left(\frac{2x^3 + 3}{x \ln x} + 6x^2 \ln(\ln x) \right)$

□